تمهيد :

سنستخدم الرمز $\alpha(x_i)$ والذي يعبر عن دالة (علاقة) بعدة متحولات مثل $\alpha(x,y,z) = (x+y>z)$ ، α بثلاث متحولات ..

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ دالة بـ n متحول أو نكتب اختصاراً $f(x_i)$ أو $f(x_j)$ أو $\alpha(x_i)$ إذا لم نكن نعرف كم عدد المتحولات .

سنستخدم الترميز $\forall x_i\ \alpha(x_i)$ والترميز $\exists x_i\ \alpha(x_i)$

مثلاً إذا كانت $\alpha(x_i) = \alpha(x_1,x_2,x_3)$ عندئذٍ الترميز $\forall x_i\ \alpha(x_i)$ نعني به $\forall x_1, x_2, x_3\ \alpha(x_1,x_2,x_3)$ والذي يعني أن $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\ \alpha(x_1,x_2,x_3)$

قوانين ونماذج (قواعد *Rules*) في المكممات

بديهيات:

$$\mathcal{L}_1:\ \alpha(x_i) \Longrightarrow \exists x_i\ \alpha(x_i)$$
$$\mathcal{L}_2: \forall x_i\ \alpha(x_i) \Longrightarrow\ \alpha(x_i)$$

$$\mathcal{R}_1: \frac{\alpha(x_i) \Longrightarrow \psi}{\exists x_i\ \alpha(x_i) \Longrightarrow \psi}$$

$$\mathcal{R}_2: \frac{\psi\ \Longrightarrow \alpha(x_i)}{\psi\ \Longrightarrow \forall\ \alpha(x_i)}$$

في $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$ الشرط أنَّ ψ لا يحوي المتحول x_i كمتحول حر .

$$\mathcal{R}_3: \frac{\alpha(x_i)}{\forall\ \alpha(x_i)}$$

في $\mathcal{R}_3$ لا تفهم على أنها $\alpha(x_i)\ \Longrightarrow \forall\ \alpha(x_i)$ لكن معناها أنه إذا كان $\alpha(x_i)$ صحيحة فإن $\forall\ \alpha(x_i)$ صحيحة.

البرهان: (برهان $\mathcal{R}_3$)

لتكن β اسنادية لا تحوي x_i كمتحول حر ،

إن $\beta \Longrightarrow \beta$ صحيحة (من المنطق الكلاسيكي $(\beta \Rightarrow \beta) = (\neg\beta \vee \beta) = T$)



كما أنَّ $\big((\beta \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha(x_i)\big) = \alpha(x_i)$ (من المنطق الكلاسيكي $(\top \Rightarrow A) = A$

ومنه $(\beta \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha(x_i)$ صحيحة كون $\alpha(x_i)$ صحيحة.

والآن حسب $\mathcal{R}_2$ ، وحيث $\psi = (\beta \Rightarrow \beta)$ لا يحوي المتحول x_i كمتحول حر ، نجد أن :

$(\beta \Rightarrow \beta) \Rightarrow \forall\, \alpha(x_i)$ صحيحة .

لدينا $(\beta \Rightarrow \beta)$ صحيحة ، والاقتضاء $(\beta \Rightarrow \beta) \Rightarrow \forall\, \alpha(x_i)$ صحيح ،

فحسب قاعدة النزع نجد أن $\forall\, \alpha(x_i)$ صحيحة. وبذلك يتم المطلوب .

$$\mathcal{L}_3: \forall x_i\, \alpha(x_i) \Rightarrow \forall x_j\, \alpha(x_j)$$

البرهان :

حسب $\mathcal{L}_2$ نجد $\forall x_i\, \alpha(x_i) \Rightarrow \alpha(x_i)$

و $\alpha(x_j) \Rightarrow \alpha(x_i)$ صحيحة (يمكن تغيير الدليل وكأنه دليل صامت ، بمعنى أن $\alpha(x_j)$ و $\alpha(x_i)$ رمزان لشيء واحد)

حسب خاصية التعدي نجد أنَّ $\forall x_i\, \alpha(x_i) \Rightarrow \alpha(x_j)$ صحيحة.

$\underbrace{\forall x_i\, \alpha(x_i)}_{\psi} \Rightarrow \alpha(x_j)$ حسب $\mathcal{R}_2$ و حيث ψ لا يحوي x_j كمتحول حر ، نجد:

$\forall x_i\, \alpha(x_i) \Rightarrow \forall x_j\, \alpha(x_j)$ وبذلك يتم المطلوب .

$$\mathcal{L}_4: \exists x_i\, \alpha(x_i) \Rightarrow \exists x_j\, \alpha(x_j)$$

البرهان:

حسب $\mathcal{L}_1$ نجد $\alpha(x_j) \Rightarrow \exists x_j\, \alpha(x_j)$

و $\alpha(x_i) \Rightarrow \alpha(x_j)$ صحيحة

حسب التعدي $\alpha(x_i) \Rightarrow \exists x_j\, \alpha(x_j)$

من $\mathcal{R}_1$ وحيث $\psi = \exists x_j\, \alpha(x_j)$ لا تحوي x_i كمتحول حر ، نجد:

$$\exists x_i\, \alpha(x_i) \Rightarrow \exists x_j\, \alpha(x_j)$$

ملاحظة : إن مهمة $\mathcal{L}_3$ و $\mathcal{L}_4$ هي تغيير الدليل

$$\mathcal{L}_5: \exists x_i\, \neg\alpha(x_i) \Rightarrow \neg\forall x_i\, \alpha(x_i)$$

يمكن أن نكتب $\exists x\, \neg\alpha(x) \Rightarrow \neg\forall x\, \alpha(x)$ أي يمكن إزالة الدليل ، لكن هنا لا يفهم أن α تابعة لمتحول واحد .

كما يمكن كتابتها على الشكل $\exists x\, \neg\alpha \Rightarrow \neg\forall x\, \alpha$.



البرهان:

حسب $\mathcal{L}_3$ نجد $\underbrace{\forall x_i\ \alpha(x_i)}_{p} \Longrightarrow \underbrace{\forall x_j\ \alpha(x_j)}_{q}$

حسب $\mathcal{L}_2$ نجد $\underbrace{\forall x_j\ \alpha(x_j)}_{q} \Longrightarrow \underbrace{\alpha(x_j)}_{r}$

وحسب قاعدة التعدي $\Big(\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big)$ ومن ثم النزع يكون $\forall x_i\ \alpha(x_i) \Longrightarrow \alpha(x_j)$ صحيحاً.

لدينا الآن $\underbrace{\alpha(x_j)}_{r} \Longrightarrow \underbrace{\forall x_i\ \alpha(x_i)}_{p}$ صحيحاً، وحسب المنطق الكلاسيكي $\big((p \Rightarrow r) \equiv (\neg r \Rightarrow \neg p)\big)$ نجد

$$\neg\alpha(x_j) \Longrightarrow \neg\forall x_i\ \alpha(x_i)$$

وحسب $\mathcal{R}_1$ وحيث $\psi = \neg\forall x_i\ \alpha(x_i)$ لا يحوي x_j كمتحول حر، نجد $\exists x_j \neg\alpha(x_j) \Longrightarrow \neg\forall x_i\ \alpha(x_i)$

والآن حسب $\mathcal{L}_4$ نجد $\exists x_i \neg\alpha(x_i) \Longrightarrow \exists x_j \neg\alpha(x_j)$

ومنه حسب قاعدة التعدي نجد: $\exists x_i \neg\alpha(x_i) \Longrightarrow \neg\forall x_i\ \alpha(x_i)$

نتيجة:

إن $\alpha(x_i)$ اسنادية فنفيها $\neg\alpha(x_i)$ اسنادية كذلك، لذا بتبديل كل $\alpha(x_i)$ بـ $\neg\alpha(x_i)$ في الجملة الأخيرة نجد:

$$\exists x_i\ \alpha(x_i) \Longrightarrow \neg\forall x_i\ \neg\alpha(x_i)$$

$$\mathcal{L}_6 : \neg\exists x\ \neg\alpha(x) \Longrightarrow \forall x\ \alpha(x)$$

البرهان:

حسب $\mathcal{L}_1$ نجد : $\alpha(x_j) \Longrightarrow \exists x_j\ \alpha(x_j)$

حسب $\mathcal{L}_4$ نجد: $\exists x_j\ \alpha(x_j) \Longrightarrow \exists x_i\ \alpha(x_i)$:

وحسب قاعدة التعدي نجد $\alpha(x_j) \Longrightarrow \exists x_i\ \alpha(x_i)$.

ومن المنطق الكلاسيكي $\big((p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)\big)$ نجد :

$$\neg\exists x_i\ \alpha(x_i) \Longrightarrow \neg\alpha(x_j)$$

والآن حسب $\mathcal{R}_2$ ، وحيث $\psi = \neg\exists x_i\ \alpha(x_i)$ لا يحوي المتحول x_j كمتحول حر ، نجد أن :

$$\neg\exists x_i\ \alpha(x_i) \Longrightarrow \forall x_j \neg\alpha(x_j)$$

وحسب $\mathcal{L}_3$ نجد $\forall x_j \neg\alpha(x_j) \Longrightarrow \forall x_i \neg\alpha(x_i)$

وحسب خاصية التعدي نجد $\neg\exists x_i\ \alpha(x_i) \Longrightarrow \forall x_i \neg\alpha(x_i)$



والآن بتبديل كل $\alpha(x_i)$ بـ $\neg\alpha(x_i)$ في الجملة الأخيرة نجد: $\neg\exists x_i \neg\alpha(x_i) \Rightarrow \forall x_i \alpha(x_i)$

وبإزالة الأدلة نجد $\neg\exists x\, \neg\alpha(x) \Rightarrow \forall x\, \alpha(x)$

$$\mathcal{L}_7: \neg\forall x_i \alpha(x_i) \Rightarrow \exists x_i \neg\alpha(x_i)$$

البرهان :

من $\mathcal{L}_6$ نجد $\neg\exists x_i \neg\alpha(x_i) \Rightarrow \forall x_i \alpha(x_i)$

ومن المنطق الكلاسيكي $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)\big)$ نجد:

$$\big(\neg\exists x_i \neg\alpha(x_i) \Rightarrow \forall x_i \alpha(x_i)\big) \Rightarrow \big(\neg\forall x_i \alpha(x_i) \Rightarrow \exists x_i \neg\alpha(x_i)\big)$$

وحسب قاعدة النزع نجد : $\neg\forall x_i \alpha(x_i) \Rightarrow \exists x_i \neg\alpha(x_i)$

$$\mathcal{L}_8: \exists x\, \neg\alpha(x) \equiv \neg\forall x\, \alpha(x)$$

البرهان: يتم برهان ذلك من $\mathcal{L}_5$ و $\mathcal{L}_7$ واحدة في اقتضاء والأخرى في الاقتضاء المعاكس. (هنا تكافؤ (ذهاب وإياب))

مثال عليها: يوجد طالب لم يحضر هذا يكافئ أن ليس جميع الطلاب حاضرين.

$$\mathcal{L}_9: \forall x\, \alpha(x) \equiv \neg\exists x\, \neg\alpha(x)$$

البرهان : مباشرة من $\mathcal{L}_8$ بأخذ النفي لطرفي التكافؤ أي بمعنى أن: $\neg\exists x\, \neg\alpha(x) \equiv \neg\neg\forall x\, \alpha(x)$ ومنه يتم المطلوب.

مثال عليها: لا يوجد طالب لم يحضر هذا يكافئ أن جميع الطلاب حاضرون.

$$\mathcal{L}_{10}: \neg\forall x\, \neg\alpha(x) \Rightarrow \exists x\, \alpha(x)$$

البرهان : من الاقتضاء المعاكس من $\mathcal{L}_8$ وبتبديل كل $\alpha(x)$ بـ $\neg\alpha(x)$.

$$\mathcal{L}_{11}: \neg\exists x\, \alpha(x) \equiv \forall x\, \neg\alpha(x)$$

البرهان: نفس $\mathcal{L}_9$ لكن بتبديل كل $\alpha(x)$ بـ $\neg\alpha(x)$.

مثال عليها: قولنا لا يوجد طالب حاضر للمحاضرة يكافئ قولنا إن جميع الطلاب حاضرون.

$$\mathcal{L}_{12}: \exists x\, \alpha(x) \equiv \neg\forall x\, \neg\alpha(x)$$

البرهان : نفس $\mathcal{L}_8$ لكن بتبديل كل $\alpha(x)$ بـ $\neg\alpha(x)$

مثال عليها: ليس جميع الطلاب غائبين(غير حاضرين) يكافئ أنه يوجد طالب واحد على الأقل حاضر.

.: انتهت المحاضرة السابعة :.